II.D Théorème de Lévy et TCL

On énonce un lemme très utile qu'on ne démontrera pas.

Lemme 20:

Soit x_n une suite de variables aléatoires réelles et soit X une variable aléatoire réelle. Alors il y a équivalence entre les deux assertions suivantes :

(1) $\forall f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad \mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$

(2) $\forall f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad \mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$

Théorème 21: de Paul Lévy

Soit x_n une suite de variables aléatoires réelles et soit X une variable aléatoire réelle. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}oi} X$;

(2) $\varphi_{X_n} \xrightarrow{c.v.s} \varphi_X$

Démonstration.

(1) $\Longrightarrow$ (2)
L'implication (1) $\Longrightarrow$ (2) est immédiate car on applique la définition de la convergence en loi :

$$\forall f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R},\mathbb{C}) \quad \mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)],$$

avec la fonction $\varphi_t : x \mapsto \mathrm{e}^{itx}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(2) $\Longrightarrow$ (1)
On va montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$. Soit $f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ on utilise la densité de la classe de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $f_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\|f - f_\varepsilon\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Alors :

$$|\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| \leqslant \underbrace{|\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f_\varepsilon(X_n)]|}_{\leqslant\varepsilon} + |\mathbb{E}[f_\varepsilon(X_n)] - \mathbb{E}[f_\varepsilon(X)]| + \underbrace{|\mathbb{E}[f_\varepsilon(X)] - \mathbb{E}[f(X)]|}_{\leqslant\varepsilon}.$$

Il suffit donc de montrer le résultat pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Soit alors $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Par inversion de Fourier dans la classe de Schwarz, on a $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{ix\xi}\mathrm{d}\xi.$$

Donc il existe $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que $f = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(\xi)e^{ix\xi}\mathrm{d}\xi$. On a alors, par Fubini et convergence dominée puis re-Fubini :

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} g(\xi)e^{iX_n\xi}\mathrm{d}\xi\right] = \int_{\mathbb{R}} g(\xi)\mathbb{E}\left[e^{iX_n\xi}\right]\mathrm{d}\xi \to \int_{\mathbb{R}} g(\xi)\mathbb{E}\left[e^{iX\xi}\right]\mathrm{d}\xi = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} g(\xi)e^{iX\xi}\mathrm{d}\xi\right] = \mathbb{E}[f(X)].$$

Ceci établit donc le théorème sur la classe de Schwarz et on conclut par densité pour les fonctions continues nulles aux bords.

D'après le lemme on a alors la convergence en loi de X_n vers X, ce qui conclut cette preuve. ∎

Théorème 22: Théorème central limite

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, identiquement distribuées, et éléments de $\mathbb{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. On suppose en outre que $\mathrm{Var}\,(X_1)\neq 0$. Alors on a :

$$\sqrt{n}\left(\bar{X}_n-\mathbb{E}\left[X_1\right]\right)\underset{n\to+\infty}{\overset{\mathcal{L}}{}}\mathcal{N}\left(0,\mathrm{Var}\,(X_1)\right)$$

Démonstration. Quitte à centrer et réduire les variables aléatoires, c'est-à-dire à remplacer X_n par $\dfrac{X_n-\mathbb{E}\left[X_1\right]}{\sqrt{\mathrm{Var}\,(X_1)}}$ on peut supposer que X_n centrée et réduite.

D'après le théorème de Paul Lévy, il suffit de montrer la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions caractéristiques $\left(\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la fonction caractéristique de la loi normale centrée réduite :

$$t\longmapsto\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

Soit $t\in\mathbb{R}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, comme $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes et identiquement distribuées, on a :

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_n}\frac{S_n}{\sqrt{n}}(t)&=\mathbb{E}\left[\exp\left(it\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\exp\left(i\frac{t}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n}\exp\left(i\frac{t}{\sqrt{n}}X_k\right)\right]\\
&\overset{\perp\!\!\!\perp}{=}\prod_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[\exp\left(i\frac{t}{\sqrt{n}}X_k\right)\right]\\
&\overset{id}{=}\mathbb{E}\left[\exp\left(i\frac{t}{\sqrt{n}}X_1\right)\right]^n\\
&=\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n
\end{aligned}$$

Or, comme $X_1\in\mathbb{L}^2$ sa fonction caractéristique est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, de plus on a :

$$\varphi_{X_1}'(0)=i\mathbb{E}\left[X_1\right]=0,\quad \varphi_{X_1}''(0)=-\mathbb{E}\left[X_1^2\right]=-\mathrm{Var}\,(X_1)=-1$$

Par Taylor-Young, on a :

$$\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)=\ldots=1-\frac{t^2}{2n}+\frac{t^2}{n}\varepsilon\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

Or pour $|a|,|b|\leqslant 1$ et pour tout n, on a :

$$|a^n-b^n|=\left|(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-k}\right|\leqslant n|a-b|.$$

Donc pour n assez grand $\left|1-\dfrac{t^2}{2n}\right|\leqslant 1$ et :
de sorte que, d'après le lemme, pour tout entier $n\geqslant N$, on ait :

$$\begin{aligned}
\left|\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t)-\left(1-\frac{t^2}{2n}\right)^n\right|&=\left|\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n-\left(1-\frac{t^2}{2n}\right)^n\right|\\
&\leqslant n\left|\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)-\left(1-\frac{t^2}{2n}\right)\right|\\
&\leqslant t^2\left|\varepsilon\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0
\end{aligned}$$

Or $\left(1-\frac{t^2}{2n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) = \varphi_N(t)$ où $N \sim \mathcal{N}(0,1)$.

D'où $\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{cvs} \varphi_N$. ■